p-radical group と radical の nilpotency index について(有限群とその周辺)

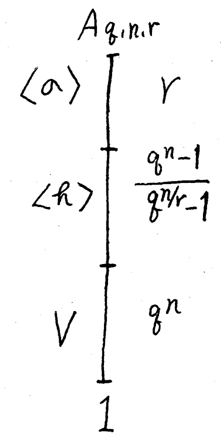
福島, 博

数理解析研究所講究録
867巻 1994年 53-60

p-radical group と radical の nilpotency index について

群馬大-教育 福島 博 (Hiroshi Fukushima)

最初に、次の群 $A_{q,n,r}$ を定義する。



qを素数, $F=GF(q^n)$, $F^*=\langle\lambda\rangle$
nの約数rに対して $\mu=\lambda^{q^{n/r}-1}$ とおく。
$\langle\sigma\rangle = Gal(F/GF(q^{n/r}))$ とおくと $|\sigma|=r$ となる。
このとき $F^* = GF(q^{n/r})^* \times \langle\mu\rangle$
hをFからFへの写像で $h(x)=x\mu$ と定めると
hはFの加法群Vの自己同型写像である。
$\langle h\rangle\langle\sigma\rangle \leqq Aut(V)$, ここで半直積 $V\langle h\rangle\langle\sigma\rangle$ を
$A_{q,n,r}$ と定める。これは affine semi-linear group $A\Gamma(V)$ の部分群である。この $A_{q,n,r}$ の特徴は、Vの任意の元xは$\langle h\rangle$で共役をとると $x^{h^i}=x\mu^i \in GF(q^{n/r})^*$ とできるからσで centralize されることである。

§1 p-radical group

Gを有限群, PをGの p-シロー群, kを標数p (>0)の体とする。このとき $J(kG) \leqq J(kH)kG \Rightarrow p\nmid |G:H|$. ここで

$J(kG)$は群環kGの radical を表す。

逆に $p \nmid |G:H| \Rightarrow J(kG) \subseteq J(kH)kG$ が成立する群Gをp-radical group という。このとき次は同値である。

(i) Gはp-radical group である。

(ii) $(k_p)^G$ が semi-simple.

(iii) $J(kG) \subseteq J(kP)kG$.

(iv) $J(kG) = \bigcap_{x \in G} J(kP)^x kG$

p-radical group の基本的性質は、Feit[1]の5章に述べられている。さてp-radical group については、次の定理がある。

定理1（奥山[9]） p-radical group はp-solvableである。

Gがp-length 1のときは、次の定理がある。

定理2（津島[11]） $G = PK$, $K = O_{p'}(G)$ のとき

Gがp-radical $\Leftrightarrow$ $[K, D] \cap C_K(D) = 1$ for ${}^\forall D \subseteq P$.

例

(1) 定理2より$G = PK$, $K = O_{p'}(G)$で、Kが可換群ならば、Gはp-radical group である。

(2) $SL(2,3)$は$p = 3$に対してp-radical groupでない。

(3) K: p'-group, Z: cyclic p-group とするとき、

$K \wr Z$ がp-radical $\Leftrightarrow$ Kが可換群.

次に p-length が2の場合の p-radical group G の構造が問題になるが、これに関して次の結果を得た。

定理3（福島[4]）

Gは次を満すとする。

(1) $|G : O_{p';p,p'}(G)| = p$, $O_p(G) = 1$, $O^{p'}(G) = G$.

(2) $O_{p';p}(G)$ のシロー p 部分群 P_0 は可換群

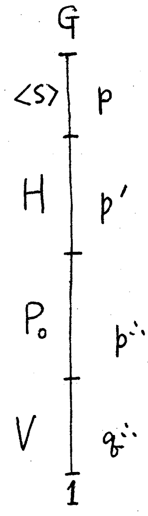
(3) $V = [O_{p'}(G), P_0]$ は G の minimal normal subgroup.

このとき G が p-radical であるための必十条件は次が成り立つことである。

(A) $\bar{G} = G/VP_0$ は kernel が $O_{p'}(\bar{G})$ であるフロベニウス群である。

(B) V は elementary abelian q-group ($q \neq p$；素数)

(C) 次の(1)または(2)が成り立つ。



(i) $G = N_G(P_0)V$, $N_G(P_0) \cap V = 1$.

(ii) $P_0 \lhd P_0H \lhd P_0H\langle s \rangle = N_G(P_0)$,

ここで $|s| = p$, H は p'-group.

(iii) 共役で作用させると V は $N_G(P_0)$-module とみなせる。このとき $V = V_1 \times \cdots \times V_p$ (V_i は V_{P_0} の homogeneous complement) と表せる。

(iv) $P_i = C_{P_0}(V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_p)$ とおくと、

$P_0 = P_1 \times \cdots \times P_p$

(v) $V_1^{s^i} = V_{i+1}$, $P_1^{s^i} = P_{i+1}$ $(0 \leqq i \leqq p-1)$

(vi) V_i, P_i は H-invariant で, $VP_0 = (V_1P_1) \times \cdots \times (V_pP_p)$.

(vii) $r = |H/C_H(V_1)|$, $|P_1| = p^m$, $|V_1| = q^n$ とおくと,

$r | n$, $\frac{q^n - 1}{q^{n/r} - 1} = p^m$ で

$V_iP_iH/C_H(V_i) \cong A_{q,n,r}$, $(1 \leqq i \leqq p)$ である。

(2) $C_G(v) \leqq O_{p',p,p'}(G)$ for $\forall v \in V^\#$.

実際 $r|n$, $\frac{q^n-1}{q^{n/r}-1} = p^m$ を満す (q, n, r, m) に対して,
Z を位数 p の巡回群として, $G = (A_{q,n,r}) \wr Z$ は, p-radical group である。

また(1)(2) の性質を満す p-radical group もつくることができる。さらにこの群は, p-length が 3, 4, 5 --- と帰納的に拡張され、次の定理を得ることができる。

定理4 (福島[3])

各自然数nに対して, p-length n の p-radical group が存在する。

§2 nilpotency index

$J(kG)^{t-1} \neq 0$, $J(kG)^t = 0$ となる自然数 t を $J(kG)$ の nilpotency index (巾零指数) という。

P が位数 p^a の p-group のとき $a(p-1)+1 \leqq t(P) \leqq p^a$ が成り立つ。 G が p-solvable のとき も同様なことが成り

立つ。即ち

$$a(p-1) \leqq t(G) \leqq p^a, \quad ここで\ p^a = |P|,\ P \in Syl_p(G).$$

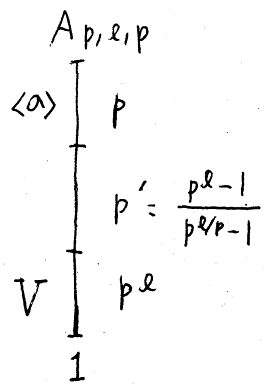
定理5 (越谷[6], 津島[10])

$t(G) = p^a \iff P$: cyclic

定理6 (本瀬, 二宮[8])

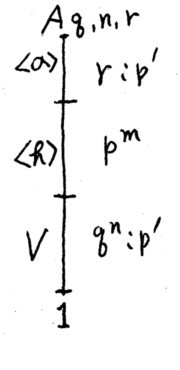
G が p-length 1 のとき $t(G) = a(p-1)+1 \iff P$; elementary abelian

p-length が 2 で $t(G) = a(p-1)+1$ を満す群の例として本瀬[7] は、$A_{p,\ell,p}$ を示した。この群は、先に示したように、V の任意の元 x に対して、$C_G(x)$ が α の共役元を含むから、$C_G(x)$ は Sylow p-部分群を含み、これが $t(G) = a(p-1)+1$ となる本質的な性質となっている。



この性質は、Brauer の height 0 予想を可解群の場合に解いた T. Wolf の論文[13] にもあらわれ、そこでは、$G = VH\langle\alpha\rangle \rhd VH \rhd V$, V: elementary abelian q-group, H; p'-group, $|\alpha| = p$ としたとき、任意の V の元 x に対して、$C_G(x)$ が Sylow p-部分群を含むような群 G を決定することが Key Theorem となっている。

さらに定理3における $A_{q,n,r}$ と比較してみると、$\frac{q^n - 1}{q^{n/r} - 1} = p^m$ より、この群においては、V の任意の元 x に対して、$C_G(x)$ は、Hall p'-group を含む。



このように $A_{q,n,r}$ と $A_{p,e,p}$ は，p と p' の立場をかえて同じ性質を持っていることは興味深いことである。

さて $A_{p,e,p}$ は $t(G)=a(p-1)+1$ を満すことを先に述べたが，定理2より，これらは p-radical group でもあることがわかる。そこで $t(G)=a(p-1)+1$ を満す p-radical group の構造を考え、次の結果を得た。

定理7 ([5])

p-radical group G が $t(G)=a(p-1)+1$ であるための必十条件は、$K=O^{p'}(G)$ が，次の条件を満すことである。

$K/O_{p'}(K) = G_1 \times M$; M = elementary abelian p-group.

$G_1 = VN$, $V \cap N = 1$, ここで $V = O_p(G_1)$.

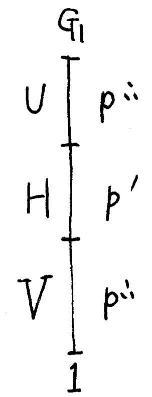
$N = HU \triangleright H$, H : p'-group, U : p-group

$V = V_1 \times \cdots \times V_m$, $H = H_1 \times \cdots \times H_m$

$VH = (V_1H_1) \times \cdots \times (V_mH_m)$

V_i, H_i は U-invariant で，

$V_iH_iU/C_U(V_i) \cong A_{p,e_i,p}$ $(i=1,\cdots,m)$



これからの問題として，次のものがある。

問題1. $G = O_{p',p,p'}(G)$ で $t(G)=a(p-1)+1$ となる群 G を決定せよ。

問題2. $t(G)=a(p-1)+1$ を満す p-solvable group G の p-

length は，おさえられるが，

References

[1] W. Feit, " The representation theory of finite group." North-Holland. Amsterdam, 1982.

[2] H. Fukushima, On groups G of p-length 2 whose nilpotency indices of J(KG) are a(p-1)+1, Hokkaido Math J. 20 (1991) 523-530.

[3] H. Fukushima, p-length of p-radical groups are unbounded, to appear J. Algebra.

[4] H. Fukushima, On p-radical groups G and the nilpotency indices of J(kG). 投稿中.

[5] H. Fukushima, Y. Hieda, T. Okuyama, Tanaka, On p-radical groups G whose nilpotency indices of J(kG) are a(p-1)+1. 作成中.

[6] S. Koshitani, On nilpotency indices of the radicals of group algebras of p-solvable groups, Proc. Japan Acad. 53, No1, 13-16.

[7] K. Motose, On the nilpotency index of the radical of a group algebra III, J. London Math Soc 25 (1982), 39-42.

[8] K. Motose, Y. Ninomiya, On the nilpotency index of the radical of a group algebra, Hokkaido Math J 4 (1975), 261-264.

[9] T. Okuyama, p-Radical groups are p-solvable, Osaka J. Math 23 (1986) 467–469.

[10] Y. Tsushima, Some notes on the radical of a finite group ring, Osaka J. Math 15, 647–653.

[11] Y. Tsushima, On p-radical groups, J. Algebra 103 (1986) 80–86.

[12] D.A.R. Wallace, Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite souble group, Proc. Edinburgh Math Soc 16, 127–134.

[13] T.R. Wolf, Defect groups and character heights in blocks of solvable groups, J. Algebra 72, 183–209.